Séries numériques

M6 – Chapitre 1

I. Vocabulaire

$(a_n)_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq n_0}}$	Suite
$\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$	Série
$S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$	Somme partielle
$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$	Somme totale

II. Séries arithmétiques et géométriques

$$\sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Arithmétique	Géométrique
Une série arithmétique de raison $r \neq 0$ est toujours divergente. $S_n = \dfrac{(a_{n_0} + a_n) \times nb_{termes}}{2}$	$\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ série géo t. q. $q \in \mathbb{C} \setminus \{0 ; 1\}$ converge $\Leftrightarrow \lvert q\rvert < 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ $S_n = \dfrac{U_{n_0} - U_{n+1}}{1-q}$ $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \dfrac{u_{n_0}}{1-q}$

III. Série à termes positifs (STP)

Une STP converge ⇔ la suite des sommes partielles est majorée.

1. Théorème de comparaison

$$\text{Soient } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ et } \sum_{n\geq 0} b_n \text{ STP}$$

<u>$\boldsymbol{a_n \leq b_n}$:</u>

$$\sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$
$$\sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div}$$

<u>$\boldsymbol{a_n \sim b_n}$:</u>

$$\sum a_n \ et \sum b_n \text{ simultanément conv ou div}$$

2. Séries de Riemann

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \qquad \begin{array}{lll} 1 < \alpha & \Rightarrow & \text{série converge} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 & \Rightarrow & \text{série diverge} \end{array}}$$

Conséquence :

$$\text{Soit } \sum u_n \text{ STP} \qquad \boxed{\begin{array}{llll} \alpha > 1 & \lim n^\alpha u_n = l < +\infty & \Rightarrow & \text{série converge} \\ \alpha \leq 1 & \lim n^\alpha u_n = l > 0 & \Rightarrow & \text{série diverge} \end{array}}$$

3. Règle de d'Alembert

$$\text{Soit } \sum u_n \text{ STP} \qquad \boxed{\begin{array}{lll} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 & \Rightarrow & \text{série converge} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 & \Rightarrow & \text{série diverge} \end{array}}$$

4. Comparaison entre séries et intégrales

$$\text{Soit } \sum_{n\geq n_0} a_n \text{ STP} \qquad a_n = f(n) \qquad F(x) = \int f(x)$$

- $a_1 + \int_1^n f(x)dx \geq S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$
- $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ conv $\Leftrightarrow F$ majorée

IV. Séries générales

1. Séries absolument convergentes

$$\sum |u_n| \text{ convergente } \Rightarrow \sum u_n \text{ absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente}$$

2. Théorème

$$\sum u_n \text{ abs conv} \quad u_n \leq Aq^n \quad q \in]0;1[\ \Rightarrow \ \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n\right| \leq \frac{Aq^{n+1}}{1-q}$$

3. Les séries alternées de Leibniz

$$\sum_{n\geq n_0} (-1)^n a_n \qquad (a_n) > 0 \ \searrow \ \to 0 \ \Rightarrow \ \text{convergentes} \ | \ S_{2n} \ \searrow \ | \ S_{2n+1} \ \nearrow$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{converge} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{converge} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$